

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

В. И. Гуляев и В. В. Мигулин

Содержание работы.

- I. Введение.
- II. Возбуждение колебаний путем изменения самондукции.
 - A. Случай задания нелинейности функцией $f(i) = \arctg(hi)$.
 - § 1. Установление основных уравнений и нахождение координат особых точек. § 2. Исследование особой точки в начале координат. § 3. Исследование прочих особых точек. Случай а) координаты особых точек имеют разные знаки; случай б) координаты особых точек имеют одинаковые знаки. § 4. Поведение системы при изменении ξ .
 - B. Случай нелинейности, задаваемой полиномом.
 - § 5. Установление основных уравнений и исследование особых точек.
- III. Возбуждение колебаний путем изменения емкости.
 - § 6. Установление основных уравнений и исследование особых точек.
 - а) Исследование особой точки в начале координат. б) Исследование прочих особых точек. Случай а) координаты особых точек имеют разные знаки. Случай б) координаты особых точек имеют одинаковые знаки. § 7. Поведение системы при изменении ξ .
- IV. Заключение.

I. ВВЕДЕНИЕ

Как известно еще из работ Рэля,¹ Мельде¹ и других авторов, периодическим изменением одного из параметров колебательной системы, определяющего собственную частоту ее колебаний, можно получить при соблюдении определенных условий возбуждения колебаний. Частота возбужденных таким образом колебаний равна половине частоты воздействия на параметр или в общем случае равна $f \cdot \frac{n}{2}$, где n — любое целое положительное число, а f — частота воздействия. Это явление описывается линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, свойства решений которых изучались рядом авторов: Пуанкаре,² Хилл,³ Матье,⁴ Тиссеран,⁵ Андронов и Леонтович,⁶ ван дер Поль и Стретт⁷ и др.

Однако эти линейные уравнения, описывающие соответствующие линейные системы, при наличии затухания допускают решения или

¹ Rayleigh. Theory of Sound, I, 1926.

² H. Poincaré. Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, II, стр. 299, 1893.

³ G. W. Hill. Acta Math. 8, 1—36, 1886.

⁴ E. Mathieu. Cours de Mathématique Physique, 1873.

⁵ F. Tisserand. Traité de Mécanique céleste, III, 1.

⁶ А. Андронов и М. Леонтович. Ж. Р. Ф.-Х. О. 59, 429, 1927.

⁷ B. Van der Pol and M. I. O. Strutt. Phil. Mag. (7), 5, 18, 1928.

только затухающие или только нарастающие по амплитуде до бесконечности, причем граничный случай является неустойчивым. Между тем, возможность применения подобного способа возбуждения колебаний может иметь практический смысл лишь в случае наличия способа получения вполне установившегося колебательного режима, амплитудой которого мы можем управлять, что в линейных системах принципиально невозможно.

Для получения установившегося колебательного состояния возбужденной посредством параметрического воздействия колебательной системы, необходимо заранее вводить специальный фактор, посредством которого мы можем управлять колебательными процессами, т. е. вводить некоторую нелинейность. Основанный на упомянутом принципе параметрического возбуждения колебаний применительно к электрическим колебательным системам параметрический генератор переменного тока, предложенный акад. Л. И. Мандельштамом и проф. Н. Д. Папалекси, как раз и включает в себя в качестве существенной составной части нелинейное приспособление, ограничивающее рост амплитуды и дающее возможность получать от подобного генератора колебания вполне определенной амплитуды. Из ряда опытов, проведенных В. А. Лазаревым¹ в ЛЭФИ, выяснилось, что в качестве подобного нелинейного приспособления может быть использована дополнительно включаемая в возбуждаемый контур самоиндукция, содержащая железо, т. е. такая, для которой магнитный поток ограничен потоком насыщения. Успешное применение подобного способа получения установившейся амплитуды поставило вопрос о создании хотя бы для этого частного случая некоторой приближенной математической схемы протекающих в системе явлений. Точное исследование описывающих интересующие нас системы нелинейных дифференциальных уравнений является делом весьма затруднительным, поскольку не существует никаких общих методов, позволяющих провести это исследование в общем случае. Однако, если предположить, что вводимая нелинейность, затухание и относительная амплитуда изменения параметра достаточно малы, то искомое решение, вообще говоря, будет мало отличаться от решения соответствующего линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. В этом случае исследование установившихся колебаний может быть проведено с помощью метода малых возмущений Пуанкаре.² Для этих же предпосылок акад. Л. И. Мандельштамом и проф. Н. Д. Папалекси указано на возможность применения приближенного метода, являющегося дальнейшим уточнением метода „медленно-меняющихся параметров“ примененного Ван дер Полем.³ Для ряда случаев возможность применения этого метода является уже строго обоснованной, и в данной работе сделана попытка применить этот метод для расчета параметрического генератора с ограничивающим дросселем, применяя его для случая, не укладывающегося в рамки упомянутого доказательства.

Применение указываемого метода к поставленной задаче позволяет после ряда упрощающих предположений прийти к системе

¹ В. А. Лазарев. Ж.Т.Ф., 4, вып. 1, 1934.

² См. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. Ж.Т.Ф., 4, вып. 1, 67, 1934.

³ В. van der Pol. Phil. Mag. [7] 3, 65, 1927.

таких двух дифференциальных уравнений первого порядка, решения которых могут быть качественно исследованы методами Пуанкаре,¹ путем разыскания особых точек на фазовой плоскости и выяснения их устойчивости, что дает ответ на ряд интересующих нас вопросов. Но получившаяся подлежащая анализу система дифференциальных уравнений может иметь несколько различных вид в зависимости от того, какое аналитическое выражение мы выберем для приближенного описания физически определяемой из эксперимента нелинейности системы, не заданной теоретически определенным аналитическим выражением. В связи с этим нам представлялось целесообразным разбить настоящую работу на отдельные главы, в которых мы предполагаем разобрать, во-первых, для случая возбуждения колебаний изменением самоиндукции два варианта, а именно задания нелинейности посредством функции $f(i) = \arctg(ki)$ и посредством степенной функции, и, во-вторых, показать, что анализ случая возбуждения колебаний изменением емкости при сделанных предположениях почти аналогичен предыдущему. Не затрагивая более сложного с вычислительной стороны случая, когда вся самоиндукция, зависящая от тока, одновременно зависит явно от времени, в настоящей работе разобран лишь тот вариант, когда вся самоиндукция контура аддитивно составляется из постоянной части, на которую и осуществляется параметрическое воздействие и нелинейной — дросселя, ограничивающего амплитуду.

Свое рассмотрение мы начнем со случая изображения потока в дросселе в виде $\Phi_d = \Phi_0 \arctg(ki) + L_2 \cdot i$,² дающего картину этой зависимости, сравнительно близкую к практически наблюдаемой.

II. ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ИЗМЕНЕНИЕМ САМОИНДУКЦИИ

А. Случай задания нелинейности функцией $f(i) = \arctg(ki)$

§ 1. Установление основных уравнений и нахождение координат особых точек

Рассмотрим колебательный контур рис. 1, уравнение э. д. с. для которого имеет вид

$$\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0. \quad (1)$$

Пусть магнитный поток Φ_1 в одной части самоиндукции линейно меняется с током, так что $\Phi_1 = L_1 \cdot i$, и пусть внешними силами производится периодическое изменение самоиндукции L_1 по закону

$$L_1 = L_0 (1 + p \sin 2\omega t). \quad (2)$$

Вторую часть потока Φ_2 — поток в ограничивающем дросселе — мы предполагаем функцией от i вида

$$\Phi_2 = \frac{2\Phi_s}{\pi} \arctg(ki) + L_2 i, \quad (3)$$

¹ H. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles. Oeuvres, т. I, 1928. L. Bieberbach Théorie der Differentialgleichungen, III. Aufl., стр. 97, 1932. A. Andronow und A. Witt. Arch. f. El. XXIV, 99, 1930. А. П. Скибарко и С. П. Стрелков. Ж.Т.Ф., IV, вып. I, 1934.

² Dreyfuss. Arch. f. El., 2, 343, 1913.

где Φ_s — поток насыщения, а L_2 — линейная часть самоиндукций дросселя.

Выражение вида $\left| \frac{d\Phi_2}{di} \right|_{i=0}$ целесообразно назвать начальной самоиндукцией дросселя L_0

$$L_0 = \frac{2k\Phi_s}{i} + L_2. \quad (4)$$

Продифференцировав еще раз по времени уравнение (1), подставляя в него выражения (1) и (3) и прибавляя к обеим частям уравнения $L_0 \frac{d^2 i}{dt^2}$, приходим к уравнению

$$L_0 + L_0 \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = L_0 \frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{L_0}{k} \cdot \frac{d^2}{dt^2} [\arctg(ki)] - R \frac{di}{dt} - L_0 \cdot p \cdot \frac{d^2}{dt^2} [i \cdot \sin 2\omega t].$$

Если теперь ввести ряд обозначений

$$\omega t = \tau; \quad i = x; \quad \frac{1}{C(L_0 + L_0)} = \omega_0^2; \quad \frac{R}{\omega(L_0 + L_0)} = \nu; \quad \frac{pL_0}{L_0 + L_0} = m; \\ \frac{L_0}{L_0 + L_0} = g; \quad \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} = \xi, \quad (5)$$

то получаем уравнение

$$\ddot{x} + x = \xi x + g\ddot{x} - \frac{g}{k} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} [\arctg(kx)] - m \frac{d^2}{d\tau^2} [x \cdot \sin 2\tau] - \nu \dot{x}. \quad (6)$$

Если сделать дополнительные предположения относительно величин расстройки, „коэффициента нелинейности“ g , затухания ν и „коэффициента модуляции самоиндукции“ m , сводящиеся к тому, чтобы отношения

$$\left| \frac{\xi}{m} \right|; \quad \frac{\nu}{m} = \frac{R}{\omega p L_0}; \quad \frac{g}{m} = \frac{L_0}{p L_0}$$

при малых m оставались бы порядка единицы, то это уравнение может быть приведено к виду

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \tau),$$

которое для достаточно малых μ ($\mu = m$) может быть, как известно, исследовано достаточно подробно.

При выполнении этих условий можно рассматривать m как малый в смысле теории Пуанкаре параметр, причем для достаточно малых m мы всегда можем искать решение, близкое к синусоидальному.

$$x = u \sin \tau - v \cos \tau \\ \dot{x} = u \cos \tau + v \sin \tau, \quad (7)$$

где u и v суть медленно меняющиеся со временем τ функции, причем при $m=0$ решение переходит в

$$x = a \sin \tau - b \cos \tau,$$

где a и b постоянны.

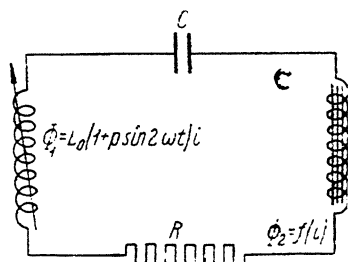


Рис. 1. Колебательный контур с периодически меняющейся самоиндукцией.

Решение (7) представляет собой чисто периодический процесс с частотой, точно равной половине частоты воздействия на параметр контура (2ω), и исследование условий его возникновения, возбуждения колебаний, устойчивости их и зависимости от параметров системы дают ответ, во всяком случае в области малых m , на вопрос о зависимости параметрических колебаний от вышеперечисленных условий и возможности существования стационарной амплитуды.

Подставляя (7) в ур-ние (6), получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= m \left\{ \frac{\xi}{m} (u \sin \tau - v \cos \tau) + \frac{g}{m} [(u + v) \cos \tau + (v - u) \cdot \sin \tau] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{mk} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} [\arctg \{k(u \sin \tau - v \cos \tau)\}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d^2}{d\tau^2} [(u \sin \tau - v \cos \tau) \cdot \sin 2\tau] - \theta (u \cos \tau + v \sin \tau) \right\} \cdot \cos \tau \\ \dot{v} &= m \left\{ \frac{\xi}{m} (u \sin \tau - v \cos \tau) + \frac{g}{m} [(u + v) \cos \tau + (v - u) \cdot \sin \tau] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{mk} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} [\arctg \{k(u \sin \tau - v \cos \tau)\}] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d^2}{d\tau^2} [(u \sin \tau - v \cos \tau) \cdot \sin 2\tau] - \theta (u \cos \tau + v \sin \tau) \right\} \cdot \sin \tau \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Исходя из предположения о медленном изменении u и v так, что $\dot{u} \ll u$ и $\dot{v} \ll v$, что дает основания для пренебрежения в правой части ур-ния (8) членами, содержащими \dot{u} и \dot{v} , и пользуясь тем, что τ в правой части ур-ний (8) входит явно лишь под знаками \sin и \cos , мы выделяем часть, не содержащую явно τ и поэтому медленно меняющуюся с изменением τ , и в качестве первого приближения ограничиваемся при дальнейшем исследовании только ею, пренебрегая влиянием остальных быстро-переменных членов.¹

Выполняя соответствующие преобразования, приходим к такой системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= + \frac{1}{2} (g - \xi) \cdot v - g \frac{v}{1 + \sqrt{1 + k^2(u^2 + v^2)}} + \frac{1}{4} (m - 2\theta) \cdot u \\ \dot{v} &= - \frac{1}{2} (g - \xi) \cdot u + g \frac{u}{1 + \sqrt{1 + k^2(u^2 + v^2)}} - \frac{1}{4} (m + 2\theta) \cdot v \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Эти уравнения, приближенно передающие процесс возникновения и угасновения колебаний в рассматриваемой системе, не содержат уже явно времени. Поэтому к ним применимы топографические методы исследования интегральных кривых, развитые Пуанкаре.²

Дальнейшее исследование заключается в изучении поведения интегральных кривых для u и v на фазовой плоскости uv , что может быть качественно получено исследованием расположения и характера особых точек уравнения.

$$\frac{dv}{du} = \frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$$

¹ Приведенные допущения являются введенными на основании соображений, основанных на доказательстве данного метода, которое в настоящей работе не приводится.

² Н. Poincaré, loc. cit., А. Andronow und A. Witt, loc. cit., А. П. Скибарко и С. П. Стрелков, loc. cit.

Устойчивые особые точки этого уравнения на плоскости uv дадут для x устойчивый периодический процесс, а неустойчивые — соответственно нарастающий или спадающий. Наличие устойчивых или неустойчивых предельных циклов указало бы нам на наличие в системе вообще говоря квазипериодических режимов. Характер этого процесса вблизи исходных значений может быть качественно получен из рассмотрения поведения интегральных кривых на плоскости uv в окрестности каждой особой точки, а в остальных точках хотя бы построением нескольких изоклин.

Координаты особых точек являются корнями системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2}(g-\xi) \cdot v + g \frac{v}{1 + \sqrt{1+k^2(u^2+v^2)}} - \frac{1}{4}(m-2\vartheta) \cdot u &= 0 \\ -\frac{1}{2}(g-\xi) \cdot u + g \frac{u}{1 + \sqrt{1+k^2(u^2+v^2)}} - \frac{1}{4}(m+2\vartheta) \cdot v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из этой системы легко может быть получено соотношение

$$v = \pm \sqrt{\frac{m-2\vartheta}{m+2\vartheta}} \cdot u, \quad (11)$$

требующее выполнения условия

$$m \geq 2\vartheta. \quad (12)$$

Для возможности существования особых точек, определяющих собой устойчивые или неустойчивые процессы с частотой ω , отличных от исходного положения равновесия $u=v=0$, что соответствует $x=0$.

Заметим, что это условие есть как раз основное условие возможности параметрического самовозбуждения, данное акад. Л. И. Мандельштамом и проф. Н. Д. Папалекси.¹

Подставляя (11) в (10), получаем следующие возможные особые точки

$$\left. \begin{aligned} u &= v = 0 \\ u^2 &= \frac{4g(m+2\vartheta)}{mk^2} \cdot \frac{2\xi \mp \sqrt{m^2-4\vartheta^2}}{[2(g-\xi) \pm \sqrt{m^2-4\vartheta^2}]^2} \\ v^2 &= \frac{4g(m-2\vartheta)}{mk^2} \cdot \frac{2\xi \mp \sqrt{m^2-4\vartheta^2}}{[2(g-\xi) \pm \sqrt{m^2-4\vartheta^2}]^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

причем:

а) Особые точки с разными знаками координат u и v (находящиеся во II и в IV квадрантах) существуют при условии

$$2\xi \geq -\sqrt{m^2-4\vartheta^2}. \quad (14)$$

б) То же с одинаковыми знаками (соответственно в I и III квадрантах) — при условии

$$2\xi \geq +\sqrt{m^2-4\vartheta^2}. \quad (15)$$

¹ См. Труды I Всесоюзной конференции по колебаниям, докл. проф. Н. Д. Папалекси.

Исследование характера особых точек

§ 2. Исследование особой точки в начале координат

Для исследования особой точки в начале координат напишем уравнение для малых вариаций u и v , полагая $u' = u + \eta = \eta$ и $v' = v + \zeta = \zeta$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= -\frac{\xi}{2} \cdot \zeta + \frac{1}{4} (m - 2\theta) \cdot \eta + \dots \\ \dot{\zeta} &= \frac{\xi}{2} \cdot \eta - \frac{1}{4} (m + 2\theta) \cdot \zeta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Характер особой точки определяется, как известно, видом корней фундаментального уравнения системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} (m - 2\theta) - \lambda & -\frac{\xi}{2} \\ \frac{\xi}{2} & -\frac{1}{4} (m + 2\theta) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

откуда, решая его, найдем

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\theta}{2} \pm \frac{1}{4} \sqrt{m^2 - 4\xi^2}. \quad (18)$$

Здесь следует различать три случая.

1) Если мы находимся в такой области для ξ , что

$$|2\xi| \geq m, \quad (19)$$

то $\lambda_{1,2}$ комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью, что соответствует наличию в начале координат устойчивого фокуса, т. е. устойчивого положения равновесия.

2) При условии

$$m > |2\xi| > \sqrt{m^2 - 4\theta^2} \quad (20)$$

$\lambda_{1,2}$ вещественны и отрицательны, что соответствует наличию в начале координат устойчивого узла, т. е. тоже устойчивого положения равновесия.

3) При условии

$$-\sqrt{m^2 - 4\theta^2} < 2\xi < +\sqrt{m^2 - 4\theta^2} \quad (21)$$

$\lambda_{1,2}$ вещественны и имеют разные знаки, что соответствует наличию в начале координат седла, которое всегда неустойчиво.

Взаимное расположение этих областей на плоскости $\theta\xi$ при $m = \text{const}$ приведено на рис. 2.

Отметим, что наличие в начале координат седла, т. е. выполнение условий (21), указывает на неустойчивость исходного равновесного состояния, а стало быть на возможность самовозбуждения.

Случай устойчивых узлов и фокуса соответствует поведению нашей системы, как обычной затухающей (нелинейной) системы.

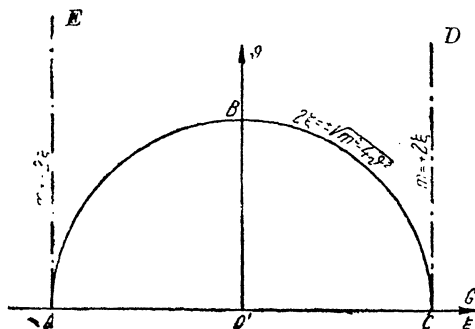


Рис. 2. Области равновесия для начала координат при $m = \text{const}$. Области слева от $m = -2\xi$ и справа от $m = +2\xi$ соответствуют устойчивому фокусу, область над кривой ABC — устойчивому узлу и область $ABCO'A$ — седлу.

§ 3. Прочие особые точки системы

Перенесем начало координат в особую точку с координатами u_0 и v_0 и напишем для этого случая уравнения в вариациях η и ζ

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{1}{2} (g - \xi) \cdot \zeta - \frac{g \zeta}{1 + \sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)}} + \\ &+ \frac{gk^2 v_0^2 \zeta}{\sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)} \cdot [1 + \sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)}]^2} + \frac{1}{4} (m - 2 \vartheta) \cdot \eta + \\ &+ \frac{gk^2 u_0 v_0 \eta}{\sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)} \cdot [1 + \sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)}]^2} \\ \dot{\zeta} &= -\frac{1}{2} (g - \xi) \cdot \eta + \frac{g \eta}{1 + \sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)}} - \\ &- \frac{gk^2 u_0^2 \eta}{\sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)} \cdot [1 + \sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)}]^2} - \frac{1}{4} (m + 2 \vartheta) \cdot \zeta - \\ &- \frac{gk^2 u_0 v_0 \zeta}{\sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)} \cdot [1 + \sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)}]^2} \end{aligned} \right\} (22)$$

Фундаментальное уравнение этой системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} (m - 2 \vartheta) + \frac{g u_0 v_0 k^2}{R(1+R)^2} - \lambda, & \frac{1}{2} (g - \xi) - \frac{g}{1+R} + \frac{gk^2 v_0^2}{R(1+R)^2} \\ -\frac{1}{2} (g - \xi) + \frac{g}{1+R} - \frac{g u_0^2 k^2}{R(1+R)^2}, & -\frac{1}{4} (m + 2 \vartheta) - \frac{g u_0^2 v_0 k}{R(1+R)^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0, (23)$$

где для сокращения письма мы полагаем

$$R = \sqrt{1 + k^2 (u_0^2 + v_0^2)}.$$

Корни фундаментального уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\vartheta}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{16} \left[m + \frac{4g u_0 v_0 k^2}{R(1+R)^2} \right]^2 + \left[-\frac{1}{2} (g - \xi) + \frac{g}{1+R} - \frac{g u_0^2 k^2}{R(1+R)^2} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} (g - \xi) - \frac{g}{1+R} + \frac{g v_0^2 k^2}{R(1+R)^2} \right]} (24)$$

Рассмотрим соответственно два случая разных и одинаковых знаков у координат особых точек.¹

а) Координаты особых точек имеют разные знаки:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \pm \frac{2}{k} \frac{1}{2(g - \xi) - \sqrt{m^2 - 4 \vartheta^2}} \cdot \sqrt{\frac{g(m + 2 \vartheta)}{m} (2 \xi + \sqrt{m^2 - 4 \vartheta^2})} \\ v_0 &= \mp \frac{2}{k} \frac{1}{2(g - \xi) - \sqrt{m^2 - 4 \vartheta^2}} \cdot \sqrt{\frac{g(m - 2 \vartheta)}{m} (2 \xi + \sqrt{m^2 - 4 \vartheta^2})} \end{aligned} \right\} (25)$$

Эти точки существуют лишь при соблюдении условия

$$2 \xi \geq -\sqrt{m^2 - 4 \vartheta^2}. (26)$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\vartheta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\vartheta^2 - \sqrt{m^2 - 4 \vartheta^2} \cdot [2 \xi + \sqrt{m^2 - 4 \vartheta^2}] \cdot [2(g - \xi) - \sqrt{m^2 - 4 \vartheta^2}]}. (27)$$

¹ См. соответственно стр. 53.

При условии

$$-\sqrt{m^2 - 4\beta^2} < 2\xi < 2g - \sqrt{m^2 - 4\beta^2}$$

эти точки оказываются устойчивыми узлами или фокусами, причем границей между узлом и фокусом является в плоскости $\beta\xi$ при $m = \text{const}$ линия

$$\beta^2 = \frac{\sqrt{m^2 - 4\beta^2} \cdot [2\xi + \sqrt{m^2 - 4\beta^2}] [2(g - \xi) - \sqrt{m^2 - 4\beta^2}]}{2(g + \xi) + \sqrt{m^2 - 4\beta^2}} = 0. \quad (28)$$

Если же

$$2\xi > 2g - \sqrt{m^2 - 4\beta^2},$$

то эти точки меняют характер устойчивости, становясь седлами, т. е. неустойчивыми.

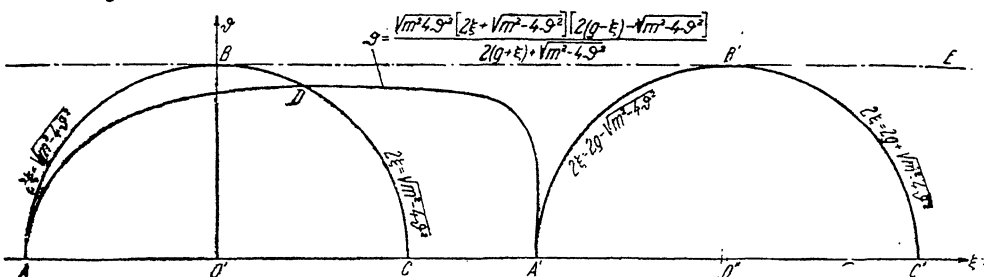


Рис. 3. Области равновесия для прочих особых точек при $m = \text{const}$ [нелинейность $f(\xi) = \text{arctg}(k\xi)$]. Для особых точек во II и IV квадрантах область $ABB'A'D$ соответствует устойчивому узлу, область $ADA'CO'A$ — устойчивому фокусу, область $EB'A'O'C'F$ — седлу; то же в I и III квадрантах — область $B'BCA'O'C'B'$ — седлу, область $EB'C'F$ — устойчивым узлу и фокусу.

б) Координаты особых точек имеют одинаковые знаки.

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \pm \frac{2}{k} \frac{1}{2(g - \xi) + \sqrt{m^2 - 4\beta^2}} \cdot \sqrt{\frac{g(m + 2\beta)}{m} (2\xi - \sqrt{m^2 - 4\beta^2})} \\ v_0 &= \pm \frac{2}{k} \frac{1}{2(g + \xi) + \sqrt{m^2 - 4\beta^2}} \cdot \sqrt{\frac{g(m - 2\beta)}{m} (2\xi - \sqrt{m^2 - 4\beta^2})} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Для существования этих точек необходимо соблюдение условий

$$2\xi \geq \pm \sqrt{m^2 - 4\beta^2}. \quad (30)$$

Для этих значений u_0 и v_0

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + \frac{\sqrt{m^2 - 4\beta^2} \cdot [2\xi - \sqrt{m^2 - 4\beta^2}] \cdot [2(g - \xi) + \sqrt{m^2 - 4\beta^2}]}{2(g + \xi) - \sqrt{m^2 - 4\beta^2}}}. \quad (31)$$

При условии

$$+\sqrt{m^2 - 4\beta^2} < 2\xi < 2g + \sqrt{m^2 - 4\beta^2}$$

этим точкам соответствуют седла — положения неустойчивого равновесия.

При

$$2\xi > 2g - \sqrt{m^2 - 4\eta^2}$$

эти точки становятся устойчивыми, причем границей между устойчивым узлом и фокусом является линия

$$\eta^2 + \frac{\sqrt{m^2 - 4\eta^2} \cdot [2\xi - \sqrt{m^2 - 4\eta^2}] \cdot [2(g - \xi) + \sqrt{m^2 - 4\eta^2}]}{2(g + \xi) - \sqrt{m^2 - 4\eta^2}} = 0. \quad (32)$$

Строя области устойчивости и неустойчивости особых точек в плоскости $\xi\eta$ при $m = \text{const}$, мы получаем картину, изображенную на рис. 3.

Уместно будет заметить, что характер и взаимное расположение особых точек на фазовой плоскости исключает возможность образования предельных циклов, откуда вытекает, что при сделанных допущениях квазипериодические режимы отсутствуют.

§ 4. Поведение системы при изменении расстройки ξ

Основываясь на проведенном исследовании, уместно будет, зная выражение для амплитуды колебаний

$$X = \sqrt{u_0^2 + v_0^2},$$

соответствующей устойчивым или неустойчивым особым точкам, рассмотреть поведение нашей системы для заданных m и η , т. е. при заданных коэффициентах модуляции самоиндукции и затухании контура, происходящее с изменением ξ (от $-\infty$ до $+1$), что может быть осуществлено изменением емкости C от 0 до ∞ ; помня, однако, что все приведенные выкладки справедливы лишь при ξ одного порядка с m .

Пусть условие существования особых точек помимо начала координат, т. е. условие самовозбуждения при $\xi = 0$, имеющее вид $m \geq 2\eta$, выполнено. В противном случае мы имели бы при изменении ξ лишь изменение характера устойчивости единственной устойчивой особой точки в начале координат, соответствующей состоянию покоя системы, т. е. отсутствию тока, и система вела бы себя как обычная затухающая нелинейная система.

Предположив, что условие $m \geq 2\eta$ выполнено, будем двигаться от отрицательных ξ в сторону положительных. До границы самовозбуждения

$$2\xi = -\sqrt{m^2 - 4\eta^2}$$

существует лишь одна особая точка в начале координат, меняющая свой характер устойчивости; при $2\xi = -m$ устойчивый фокус переходит в устойчивый же узел.

При достижении границы самовозбуждения

$$2\xi = -\sqrt{m^2 - 4\eta^2}$$

устойчивый узел в начале координат переходит в седло, существующее в области самовозбуждения системы $-\sqrt{m^2 - 4\eta^2} < 2\xi < +\sqrt{m^2 - 4\eta^2}$. Кроме того, здесь появляются еще две устойчивых особых точки, удаляющиеся от начала координат с возрастанием ξ .

Это соответствует тому, что под влиянием любого сколь угодно малого толчка в системе возникают нарастающие колебания, система самовозбуждается, и амплитуда колебаний растет до значения $X = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$, где u_0 и v_0 координаты соответствующей особой точки, в которую приходит система в зависимости от фазы начального толчка. Амплитуда установившихся колебаний растет с увеличением расстройки ξ , производимой, как это было указано, изменением емкости. Характер устойчивости особых точек дает ответ на вопрос о характере процесса установления стационарной амплитуды. Когда особые точки суть узлы, амплитуда колебаний монотонно приближается к своему окончательному значению. Если же особые точки суть фокусы, то амплитуда нарастающих колебаний при своем установлении совершает так называемые „качания“, т. е. большее или меньшее число колебаний в зависимости от меньшего или большего значения δ вблизи окончательного значения.

По выходе из области самовозбуждения в сторону положительного ξ в начале координат снова получаются сперва устойчивый узел, затем устойчивый фокус (совершенно аналогично области со стороны отрицательных ξ), указывающие на устойчивость исходного состояния покоя. Но кроме этого появляются еще два неустойчивых положения равновесия, соответствующие появлению седла на фазовой плоскости и ограничивающие область устойчивого нулевого положения системы от области стационарной амплитуды. Здесь мы наблюдаем так называемое явление „затягивания“, когда, выходя из области самовозбуждения путем увеличения расстройки, мы не теряем устойчивости существующих колебаний системы, увеличивая амплитуду колебаний до ∞ (на границе $2\xi = 2g - \sqrt{m^2 - 4\delta^2}$), хотя исходное положение равновесия уже делается устойчивым. Как мы уже говорили, система не самовозбуждается в этой области, но, задав соответствующей величины и фазы начальный толчок, равный в лучшем случае амплитуде колебаний, соответствующей неустойчивому положению равновесия — расстоянию от начала координат до седла на фазовой плоскости uv , можно забросить систему за пределы начальной области устойчивости, после чего система будет двигаться к стационарной амплитуде — к устойчивой особой точке, уходящей в бесконечность, как было выше указано, при

$$2\xi = 2\xi_1 = 2g - \sqrt{m^2 - 4\delta^2}. \quad (33)$$

По прохождении границы $\xi = \xi_1$ в системе нет устойчивого положения равновесия; всякие случайные толчки, амплитуда которых меньше по крайней мере, чем

$$X^2 = \frac{16g(g - \sqrt{m^2 - 4\delta^2})}{k^2(m^2 - 4\delta^2)}, \quad (34)$$

приводят систему снова к нулевому положению равновесия; толчки же большие могут в случае благоприятной фазы толчка забросить систему в такую область, в которой возникает нарастающий колебательный процесс. Однако следует ко всему вышесказанному добавить, что наши уравнения и предполагаемые решения соответствуют действительно протекающему процессу лишь при соблюдении положенных ограничений на величины ξ , δ , g ,¹ и что поэтому полученная

¹ См. стр. 51.

картина расположения соответствующих областей может дать правильный результат лишь вблизи области самовозбуждения, а с дальнейшим ростом и с неизбежным при этом появлением и ростом гармоник полученные результаты все хуже и хуже будут описывать происходящий процесс.

Б. Случай нелинейности, задаваемой полиномом 3-й степени

§ 5. Установление основных ур-ний и исследование особых точек

Как было указано ранее, для аналитического выражения зависимости магнитного потока в ограничивающем дросселе от тока можно воспользоваться и другими выражениями кроме использованного в предыдущем параграфе арктангенса. Например, подобно тому, как это делается для ламповой характеристики, можно изобразить эту зависимость в виде полинома и, предположив, что дроссель работает без подмагничивания, ввиду чего четные степени должны отсутствовать, изобразить эту зависимость в первом приближении в виде

$$\Phi_2 = L_0(i - qi^3). \quad (35)$$

Это выражение удовлетворительно передает общий характер кривой $\Phi_2 = f(i)$ в отсутствие подмагничивания¹ лишь при

$$|i| \leq \frac{1}{3q}, \quad (36)$$

так как за пределом этой величины кривая, изображаемая выражением (35), перестает быть монотонной.

Приняв с учетом сделанной оговорки подобное выражение для связи между током и магнитным потоком в ограничивающем дросселе и написав уравнение э. д. с. для нашего контура с переменной во времени самоиндукции,

$$L \frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0, \quad (1)$$

можно, проделав преобразования, аналогичные преобразованиям § 1, прийти к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\xi}{2} \cdot v - \frac{1}{4}(m + 2\delta) \cdot u + \frac{r}{8} \cdot v(u^2 + v^2) \\ \dot{v} &= \frac{\xi}{2} \cdot u + \frac{1}{4}(m - 2\delta) \cdot v - \frac{r}{8} \cdot u(u^2 + v^2), \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где u и v медленно меняющиеся функции, входящие в приближенное решение ур-ния (1)

$$i = x = u \sin \tau - v \cos \tau, \quad r = \frac{3qL_0}{L_0 + L\delta}, \quad (38)$$

а ξ , m , δ и τ те же самые обозначения, что и в предыдущем случае. Мы не приводим подробного качественного анализа решений системы (37), ибо он совершенно аналогичен предыдущему, и целесообразно лишь указать на некоторые особенности в расположении и устойчивости особых точек фазовой плоскости uv и вытекающие отсюда заключения о поведении нашей системы.

Начало координат, как и ранее, является особой точкой, характер устойчивости которой меняется совершенно так же, как и в предыдущем параграфе, так что расположение областей узла, фокуса и седла (т. е. самовозбуждения системы), приведенное на рис. 2, остается в силе и для данного случая. Расположение остальных обла-

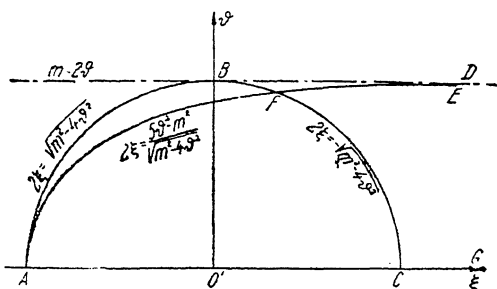


Рис. 4. Области равновесия для прочих особых точек при $m = \text{const}$ (случай полинома 3-й степени). Для особых точек в I и III квадрантах область $D B A F E$ соответствует устойчивому узлу, область $E F A O' C$ — устойчивому фокусу; то же во II и IV квадрантах — область $D B C G$ — седлу.

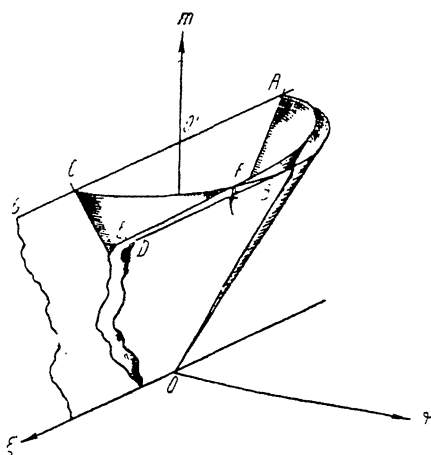


Рис. 5. Области равновесия для прочих особых точек в пространстве $\xi \eta m$ (случай полинома 3-й степени). ...

стей, в которых находятся прочие устойчивые или неустойчивые особые точки, приведено на рис. 4, 5, имеющих большое сходство с соответствующими картинками предыдущего случая.

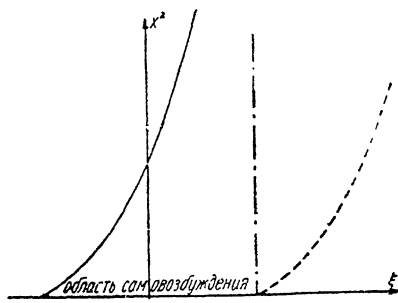


Рис. 6-а. Случай арктангенса.

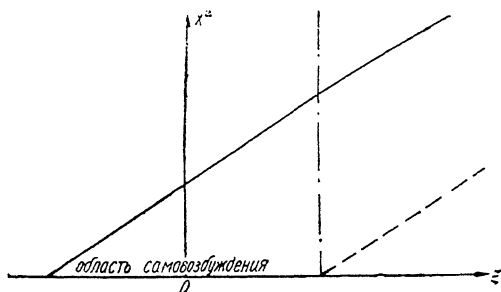


Рис. 6-б. Случай полинома 3-й степени.

Рис. 6. Зависимость конечной амплитуды колебаний от расстройки ξ при $m = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const} = \frac{m}{3}$. Пунктиром проведена амплитуда необходимого минимального начального толчка.

Для амплитуды установившихся колебаний в этом случае получается выражение

$$X^2 = \frac{2}{r} (2\xi + \sqrt{m^2 - 4\vartheta^2}). \quad (39)$$

Для сравнения на рис. 6, 7 приведены графики, дающие величину амплитуды для этого и предыдущего случая, как функцию ξ и η . Относительно полученных более простых, нежели ранее, результатов, следует еще раз подчеркнуть, что и выражение для конечной амплитуды, и картина расположения областей устойчивости, неустойчивости, качания колебаний и пр., справедливы лишь для таких ξ ,

при которых $|\xi| < \frac{1}{3q}$.

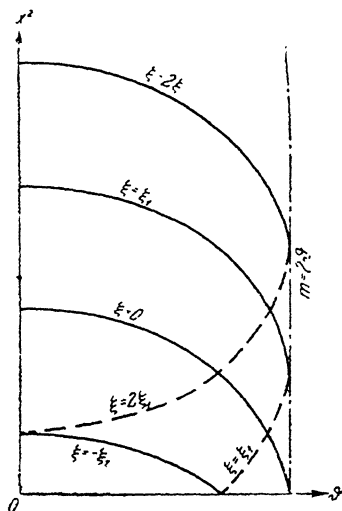


Рис. 7-а. Случай арктангенса.

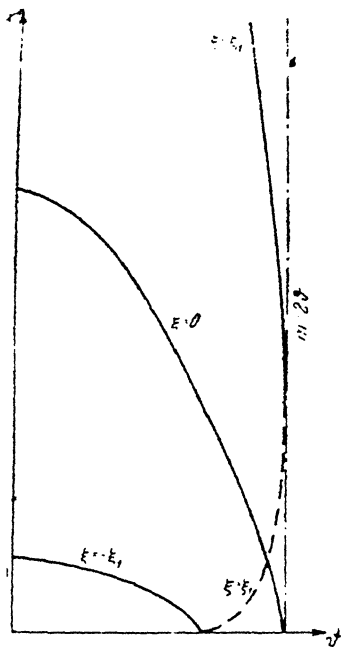


Рис. 7-б. Случай полинома 3-й степени.

Рис. 7. Зависимость конечной амплитуды колебаний от затухания δ при $m = \text{const}$ и $\xi = \text{const}$ ($\xi_1 = \frac{m}{3}$). Пунктиром проведена амплитуда необходимого минимального начального толчка.

Предыдущие выводы получены в предположении, что

$$\Phi_2 = L_0(i - qi^3).$$

Аналогичные результаты¹ получаются и в том случае, если предположим, что поток Φ_2 передается выражениями вида

$$\Phi_2 = -L_0(i - qi^3)$$

или

$$\Phi_2 = L_0(i + qi^3).$$

Разница заключается лишь в том, что r в этом случае отрицательно. Вследствие этого стационарная амплитуда будет выражаться через

$$X^2 = \frac{2}{|r|} (-2\xi + \sqrt{m^2 - 4\xi^2}). \quad (39.)$$

¹ Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. ЖТФ IV, вып. 1, 5, 1934.

В этом случае ξ будет ограничено со стороны положительных ξ выражением

$$+\sqrt{m^2 - 4\theta^2} > 2\xi \quad (39_2)$$

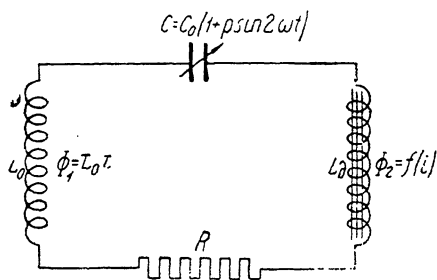
(на рис. 4, 5, 6б и 7б для этого случая следует изменить направление оси ξ на обратное).

Как это вытекает из опытов В. А. Лазарева,¹ этот случай по видимому может иметь место в случае дросселя с подмагничиванием.

III. ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПУТЕМ ИЗМЕНЕНИЯ ЕМКОСТИ

§ 6. Установление основных уравнений и исследование особых точек

Рассмотрим теперь случай возбуждения колебаний путем изменения емкости (рис. 8). Предположим, как и прежде, что необходимая для установления амплитуды нелинейность введена посредством дросселя, с железом, так что весь магнитный поток состоит из двух частей — линейного и нелинейного, зависящих от тока, так что



так что

$$\Phi_1 = L_0 i \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \frac{2\Phi_s}{\pi} \operatorname{arctg}(ki).$$

Пусть

$$C = C_0(1 + p \sin \omega t). \quad (40)$$

Рис. 8. Колебательный контур с периодически меняющейся емкостью.

Тогда в наших обозначениях уравнение для электродвижущих сил в контуре рис. 8 будет

$$\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + Ii + \frac{1}{C} \int i dt = 0. \quad (1)$$

Вводя прежние обозначения для L_0 , θ , ξ , ω_0^2 , g , $\omega t = \tau$ и полагая $i = \dot{x}$, получим, предполагая, что высшими степенями p можно пренебречь

$$\ddot{x} + x = \xi x - p(1 - \xi) \cdot \sin 2\tau \cdot \dot{x} - \theta \dot{x} - \frac{g\ddot{x}}{1 + k^2\dot{x}^2} + g\ddot{x}. \quad (41)$$

Здесь [необходимо сделать те же предположения относительно $\left|\frac{\xi}{p}\right|$, $\frac{\theta}{p}$, $\frac{g}{p}$, что мы делали и раньше, т. е. что эти величины имеют порядок единицы при $p \rightarrow 0$. Тогда можно искать решение этого уравнения в форме, мало отличающейся от синусоидальной.

Полагая

$$\begin{aligned} x &= u \sin \tau - v \cos \tau \\ \dot{x} &= u \cos \tau + v \sin \tau \end{aligned} \quad (7)$$

и считая

$$\dot{u} \ll u \quad \text{и} \quad \dot{v} \ll v,$$

¹ В. А. Лазарев, loc. cit.

мы легко получим, повторяя рассуждения предыдущих параграфов, следующие уравнения для u и v :

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= +\frac{1}{2}(g-\xi) \cdot v - \frac{1}{4}[p(1-\xi) + 2\theta] \cdot u + \frac{gv}{1 + \sqrt{1 + k^2(u^2 + v^2)}} \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2}(g-\xi) \cdot u + \frac{1}{4}[p(1-\xi) - 2\theta] \cdot v - \frac{gu}{1 + \sqrt{1 + k^2(u^2 + v^2)}} \end{aligned} \right\} (42)$$

совпадающие с ур-ниями (9) с одним различием: там, где в ур-ниях (9) стоит m , у нас всюду имеется $p(1-\xi)$. Исходя из этого нам не к чему приводить подробный анализ этих уравнений, сводящийся опять к разысканию особых точек на фазовой плоскости, исследованию хода интегральных кривых, определению границ области устойчивости и т. д., а стоит только кратко перечислить основные результаты.

Аналогично случаю § 1 мы имеем особую точку в начале координат $u=v=0$ и две группы из четырех особых точек, попарно имеющих разные и одинаковые знаки у координат.

Проделав все соответствующие выкладки, мы придем к следующим выводам.

а. Исследование особой точки в начале координат

1) Если

$$|2\xi| > p(1-\xi), \quad (43)$$

то в начале координат устойчивый фокус.

2) При

$$p^2(1-\xi)^2 - 4\theta^2 < 4\xi^2 \quad (44)$$

мы получим в начале координат устойчивый узел и наконец

3) при

$$-\sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\theta^2} < 2\xi < +\sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\theta^2} \quad (45)$$

в начале координат будет седло, и система самовозбудится. Соответственные области равновесия для начала координат ξ, p приведены на рис. 9.

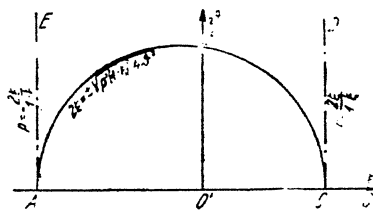


Рис. 9. Области равновесия для начала координат в случае переменной емкости (случай арктангенса). Области FAB и DCG соответствуют устойчивому фокусу, область $EABCD$ — устойчивому валу и область $ABCO'A$ — седлу.

б. Исследование прочих особых точек

а) Координаты особых точек имеют разные знаки

Пусть

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \pm \frac{2}{k} \frac{1}{2(g-\xi) - \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\theta^2}} \cdot \sqrt{\frac{g[p(1-\xi) + 2\theta]}{p(1-\xi)} - (2\xi + \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\theta^2})} \\ v_0 &= \mp \frac{2}{k} \frac{1}{2(g-\xi) - \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\theta^2}} \cdot \sqrt{\frac{g[p(1-\xi) - 2\theta]}{p(1-\xi)} - (2\xi + \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\theta^2})} \end{aligned} \right\} (46)$$

По приведении исследований получаем в этих особых точках

1) Седло, если

$$2\xi > 2g - \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\theta^2} \quad (47)$$

2) Устойчивый узел при

$$\eta^2 > \frac{(2\xi + \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}) [2(g-\xi) - \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}] \cdot \sqrt{p^2(1-\xi) - 4\eta^2}}{2(g+\xi) + \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}}. \quad (48)$$

3) Устойчивый фокус при

$$\eta^2 < \frac{(2\xi + \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}) [2(g-\xi) - \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}] \cdot \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}}{2(g+\xi) + \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}}. \quad (49)$$

При подходе к границам седла координаты устойчивых особых точек уходят в бесконечность.

б) Координаты особых точек имеют одинаковые знаки

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \pm \frac{2}{k} \frac{1}{2(g-\xi) + \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}} \cdot \sqrt{\frac{g[p(1-\xi) + 2\eta]}{p(1-\xi)} \cdot (2\xi - \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2})} \\ v_0 &= \pm \frac{2}{k} \frac{1}{2(g-\xi) + \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}} \cdot \sqrt{\frac{g[p(1-\xi) - 2\eta]}{p(1-\xi)} \cdot (2\xi - 1) \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Для этого случая имеем седло при

$$+ \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2} < 2\xi < 2g + \sqrt{p^2(1-\xi)^2 - 4\eta^2}. \quad (51)$$

При подходе к границе координаты седла становятся бесконечными, после чего точка становится устойчивой.

§ 7. Поведение системы при изменении ξ

Так как наша система ведет себя аналогично описанной в § 4, то ограничимся лишь кратким перечислением основных выводов.

При постоянных p и η и соблюдении условий существования особых точек при изменении ξ со стороны отрицательных ξ , т. е. при уменьшении собственной частоты контура до границы самовозбуждения, наша система будет вести себя аналогично предыдущему случаю, как нелинейная затухающая система с единственным положением равновесия $u = v = 0$, $X = 0$; меняется лишь характер устойчивости системы. При переходе за границу самовозбуждения начальное положение равновесия становится неустойчивым, и амплитуда колебаний от малейшего толчка начинает нарастать до некоторого конечного значения, определяемого формулой

$$X = \sqrt{u_0^2 + v_0^2},$$

где u_0 и v_0 координаты соответствующей особой точки, куда приходит система в зависимости от фазы начального толчка.

По выходе из области самовозбуждения с увеличением ξ начальное положение снова становится устойчивым, но аналогично предыдущему случаю и здесь достаточно задать соответствующей амплитуды и фазы начальный толчок для того, чтобы закинуть систему в область нарастающего решения, где амплитуда колебаний снова приходит к своему конечному значению.

И здесь мы имеем согласно теории, границу, где амплитуда устойчивых колебаний уходит в бесконечность. Однако и в этом случае мы должны иметь в виду, что наши представления о процессе сильно идеализированы, так что изложенный нами приближенный метод расчета может качественно передавать явление лишь вблизи области самовозбуждения.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе, представляющей часть общего цикла работ по исследованию нелинейных систем, проводимых под общим руководством акад. Л. И. Мандельштама и проф. Н. Д. Папалекси с помощью метода, указанного акад. Л. И. Мандельштамом и проф. Н. Д. Папалекси, произведен приближенный математический анализ работы параметрического генератора с ограничивающим дросселем. Для разобранных случаев возбуждения колебаний — изменением самоиндукции и изменением емкости, ход расчета и полученные результаты почти совпадают. Настоящая работа носит только расчетный характер, что обусловлено тем, что полученный В. А. Лазаревым¹ при обследовании подобного параметрического генератора богатый экспериментальный материал публикуется в виде отдельной статьи.

Сделанная нами при постановке задачи идеализация не позволила, правда, получить данные для практического расчета всех характеристик реального генератора и таким образом проверить их полностью с количественной стороны. Однако проведенный расчет позволяет охватить наиболее существенные стороны явлений, протекающих в параметрическом генераторе. Поэтому здесь будет уместно провести только некоторые сопоставления экспериментальных данных с данными, полученными на основании приведенного здесь анализа. Так например экспериментальные данные подтверждают правильность приведенного в статье условия самовозбуждения генератора

$$|2\xi| < \sqrt{m^2 - 4\theta^2}.$$

Кроме того осциллографирование процесса нарастания амплитуды показало, что в системе при больших затуханиях подход к установившейся амплитуде совершается без качаний, а при меньших затуханиях с качаниями амплитуды, что также согласуется с данными расчета. Для более точной проверки границы между этими двумя режимами, которая должна соответствовать границе между устойчивыми узлом и фокусом, желательны более точные дополнительные эксперименты.

Затем следует указать на качественное совпадение монотонного характера зависимости амплитуды от расстройки, получаемой и расчетно и экспериментально. Все это вместе взятое позволяет надеяться, что примененный метод, за любезное указание которого мы приносим глубокую благодарность проф. Н. Д. Папалекси и акад. Л. И. Мандельштаму, при дальнейшем углублении может дать достаточно близкую к действительности картину и позволит дать расчетные формулы, на основании которых можно будет производить уже технические расчеты генераторов, основанных на параметрическом возбуждении колебаний.

Ленинград
ЛЭФИ
Июнь—июль 1933 г.

Поступило в Редакцию
3 августа 1933 г.

¹ См. В. А. Лазарев, loc. cit.

ON THE STABILITY OF OSCILLATING SYSTEMS WITH PERIODICALLY VARYING PARAMETERS

by *V. Gulaev* and *V. Migulin*

In this paper the authors investigate the stability of oscillations in a system with periodically varying parameters by the method of „shortened equations“, being a further development of van der Pol's method.

The conditions for building up of selfoscillations and the expression of stationary amplitude have been obtained with respect to the detuning, damping and grade of modulation of the parameter. The mode of establishing of the stationary amplitude has been investigated qualitatively. The theoretical results obtained for the two different expressions of non-linearity coincides qualitatively with experience.
